

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

1) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eseguire, ove possibile, le seguenti operazioni:

a) $B+A$; b) $B+C$; c) $B \times C$; d) $B \times A$; e) $C \times A$; f) $A-B$; g) $5 \times A$

Osserviamo, in primo luogo, che:

- A è una matrice di ordine 3×3
- B è una matrice di ordine 3×3
- C è una matrice di ordine 3×2

Ne segue, pertanto, che:

a) $B+A$ è possibile perché le due matrici hanno stesso ordine

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0+1 & 2+3 \\ 0+2 & 1+0 & -1-1 \\ -1+0 & 3+1 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $B+C$ non è possibile perché le due matrici hanno ordine diverso

c) $B \times C$ è possibile perché il numero delle colonne di B è uguale al numero delle righe di C

$$B \times C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -3+4 \\ 2 & 1-2 \\ 1+6 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$B \times C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

d) $B \times A$ è possibile perché il numero delle colonne di B è uguale al numero delle righe di A

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1+2 & 3-4 \\ 2 & -1 & -1+2 \\ 1+6 & -1 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

e) $C \times A$ non è possibile perché il numero delle colonne di C è diverso dal numero delle righe di A

f) $A - B$ è possibile perché le due matrici hanno stesso ordine

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 & 1-0 & 3-2 \\ 2-0 & 0-1 & -1-(-1) \\ 0-(-1) & 1-3 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

g) $5 \times A$ è possibile perché è sempre possibile moltiplicare una matrice per un numero qualsiasi

$$\begin{aligned} 5 \times A &= 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 15 \\ 10 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \\ 5 \times A &= \begin{pmatrix} -5 & 5 & 15 \\ 10 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

2) Utilizzando il Teorema degli Orlati, calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con l'osservare che la matrice A è quadrata di ordine $m \times n = 4 \times 4$, per cui risulta:

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{4, 4\} = 4$$

Poiché, inoltre, la matrice A non è la matrice nulla segue che $r(A) \neq 0$. Dunque:

$$0 < r(A) \leq 4$$

Consideriamo ora un minore del secondo ordine diverso da zero. Sia esso, ad esempio:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamoci ora i minori orlati di M_1 , del terzo ordine, osservando che se essi sono tutti nulli allora è $r(A) = 2$, mentre se ne esiste almeno uno non nullo è $r(A) \geq 3$. Otteniamo, allora:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 0 + 2 - 4 - 3 - 0 = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2 - 0 - 3 - 0 = 1 \neq 0$$

Poiché abbiamo trovato un minore orlato di M_1 del terzo ordine diverso da zero possiamo affermare che:

$$r(A) \geq 3$$

Dobbiamo adesso calcolare i minori orlati di M_2 del quarto ordine, osservando che l'unico minore del quarto ordine estraibile da A è proprio il $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (15 + 3 + 2 - 5 - 2 - 9) - 0(15 + 0 + 4 - 0 - 2 - 18) + 2(3 + 0 + 2 - 0 - 1 - 6) +$$

$$- 0(2 + 0 + 6 - 0 - 5 - 4) = 4 - 0(-1) + 2(-2) - 0(-1) = 4 + 0 - 4 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \neq 4$$

Poiché abbiamo trovato che tutti i minori orlati di M_2 del quarto ordine sono uguali a zero possiamo affermare che:

$$r(A) = 3$$

Prof.ssa Daniela Tondini

I Parziale - Compito C
30/03/2006
A.A. 2005 – 2006

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare il suo determinante*

Essendo A una matrice quadrata di ordine 4, risulta possibile calcolare il suo determinante utilizzando il metodo di Laplace, sviluppandolo rispetto alla prima o alla seconda riga (è più conveniente scegliere una di tali righe in quanto in esse vi è un elemento nullo, a differenza delle altre righe!!!). Consideriamo, ad esempio, la prima riga. Per la regola dei segni otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{0} & \overset{-}{1} \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante di A :

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot [3 - 2 - 12 - (-8 + 9 - 1)] - 2 \cdot [0 + 2 + 24 - (8 + 0 + 2)] + \\ &+ 0 \cdot [-0 + 6 - 16 - (-8 - 0 + 6)] - 1 \cdot [-0 + 6 - 4 - (-2 - 0 + 18)] = \\ &= 1 \cdot (-11 - 0) - 2 \cdot (26 - 10) + 0 \cdot (-10 + 2) - 1 \cdot (2 - 16) = -11 - 32 + 0 + 14 = -29 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -29$$

b) *Dire se è ridotta ed in caso contrario ridurla attraverso le operazioni elementari*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che una matrice ridotta (per righe) è una matrice tale che in ogni riga risulta possibile trovare un elemento speciale, non nullo, al di sotto del quale tutti gli altri elementi della matrice stessa sono nulli.

In virtù di tale definizione risulta facile convincersi che la matrice data non è ridotta.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
 CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

Cerchiamo, pertanto, di ridurla sfruttando le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 4R_4 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -21 & 13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 21R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice ridotta sarà

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$a_{11} = 1; \quad a_{24} = 4; \quad a_{32} = 1$$

sono gli elementi speciali rispettivamente della prima, della seconda e della terza riga della matrice.

4) Calcolare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con il vedere se esiste o meno la matrice inversa di A calcolando il suo determinante. Risulta pertanto:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}, \text{ inversa di } A$$

Dunque:

$$\det A = -3$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

Primo metodo

Calcoliamo l'inversa di A utilizzando il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* . Risulta:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
 CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
30/03/2006
A.A. 2005 – 2006

Secondo metodo

Affianchiamo alla matrice A , di ordine 3×3 , la matrice identità dello stesso ordine:

$$[A | I_3] = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right)$$

Effettuiamo ora le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di $[A | I_3]$ in modo tale da ottenere, alla fine, una matrice della forma $[I_3 | B]$, dove la matrice B sarà proprio l'inversa, A^{-1} , di A :

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \\ &\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{3}R_3}} \\ &\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$

Dunque risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

30/03/2006

A.A. 2005 – 2006

5) *Dati i seguenti vettori*

$$\underline{v}_1 = (2, 1, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, 0, -1), \quad \underline{v}_3 = (-1, 0, 1)$$

verificare se sono linearmente indipendenti o dipendenti

Primo metodo

Sfruttiamo la definizione di lineare dipendenza o indipendenza di vettori.

Scriviamo una combinazione lineare dei tre vettori e la eguagliamo al vettore nullo, precisamente:

$$(*) \quad k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

dove i k_i ($i = 1, 2, 3$) sono degli scalari ovvero dei numeri reali.

Poniamo ora nella (*), al posto dei vettori, le terne assegnate:

$$k_1 (2, 1, 1) + k_2 (1, 0, -1) + k_3 (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Moltiplichiamo ciascuna componente del vettore per il corrispondente scalare:

$$(2k_1, k_1, k_1) + (k_2, 0, -k_2) + (-k_3, 0, k_3) = (0, 0, 0)$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$(2k_1 + k_2 - k_3, k_1 + 0 + 0, k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

cioè:

$$(2k_1 + k_2 - k_3, k_1, k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Affinché l'equazione sopra scritta sia soddisfatta, i due membri devono essere uguali, ovvero i due vettori (quello che figura al primo membro e quello che figura al secondo membro) devono avere uguali le componenti che si trovano nella medesima posizione, precisamente deve risultare:

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Resta quindi da risolvere il sistema sopra riportato, ovvero determinare i valori delle incognite k_i ($i = 1, 2, 3$), osservando che se sono tutti nulli allora i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, mentre se ne esiste uno diverso da zero allora siamo nel caso della lineare dipendenza dei vettori.

Sottolineiamo, in primo luogo, che si tratta di un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite.

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$k_1 = 0$$

Sostituiamo tale valore, ad esempio, nella prima equazione:

$$k_2 - k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = k_3$$

Sostituiamo i valori fino ad ora trovati nella terza equazione:

$$-k_3 + k_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

quindi la terza equazione non ha portato alcun contributo ai risultati precedentemente trovati.

Abbiamo così ottenuto:

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = k_3$$

Prof.ssa Daniela Tondini

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C
30/03/2006
A.A. 2005 – 2006

Dunque, per $k_3 = 1$, una possibile soluzione del sistema sarà data dalla terna:

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 1, 1)$$

Poiché gli scalari, soluzione del nostro sistema, non sono tutti nulli (k_2 dipende da k_3 !!!) i tre vettori assegnati risultano **linearmente dipendenti**.

Secondo metodo

Sfruttiamo la nozione di rango.

Consideriamo la matrice costituita dai tre vettori riga assegnati:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di A , sapendo che due o più vettori sono linearmente indipendenti se il rango della matrice ad essi associata è massimo.

Risulta, pertanto:

$$0 < r(A) \leq 3$$

(la matrice A non è la matrice nulla!!!)

Per il calcolo del rango di A , applichiamo il teorema di Kronecker e consideriamo il seguente minore di ordine 2 diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamo adesso l'unico minore orlato di M_1 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Dunque, poiché tale minore è nullo risulta $r(A) = 2$, cioè il rango di A non è massimo. I vettori sono pertanto **linearmente dipendenti**.

Prof.ssa Daniela Tondini